

Sala 303 ~~Apêndice~~ 10 ~~Apêndice~~

1.

Texto Referência

Isolantes (Dielétricos)

"The Feynman Lectures on Physics," vol. 2, capítulo 10, Seções 10.1 - 10.4

1. Introdução

O efeito ^{apora} se presta das propriedades das
das propriedades quando submetidos à aplicação
de um campo elétrico. Basicamente, se pode
classificar os materiais (em relação à resposta
desses materiais qdo submetidos à um campo
aplicado) em duas classes:

(i) condutores.

Nesse caso particular a nossa imagem (modelo)
são cargas que movimentam livremente
através do material.

* não há campo elétrico dentro do condutor.*

(ii) ~~Isolantes~~ ^{Dielétricos} (Dielétricos)

Nesse segundo caso, não há condução

de electricidade. As cargas estão "ligadas"
a um átomo (molécula) específico (a/b).

Novas circunstâncias, assim, levadas a ver
que a aplicação do campo eléctrico é
totalmente nova. Entretanto, a experimen-
tação de um capacitor de placas paralelas
preenchido com um dielétrico (isolante) indica
que a situação é um pouco mais complicada.

Se o dielétrico preenche completamente o
espaço entre as placas, a capacitância
do dispositivo ^{na verdade} é incrementada

$$C' = k C \quad (1)$$

(ver valores de k p/ alguns materiais no verso)

κ e' a constante dielétrica. Obviamente se há vácuo entre as placas $\kappa=1$.

Dispositivo

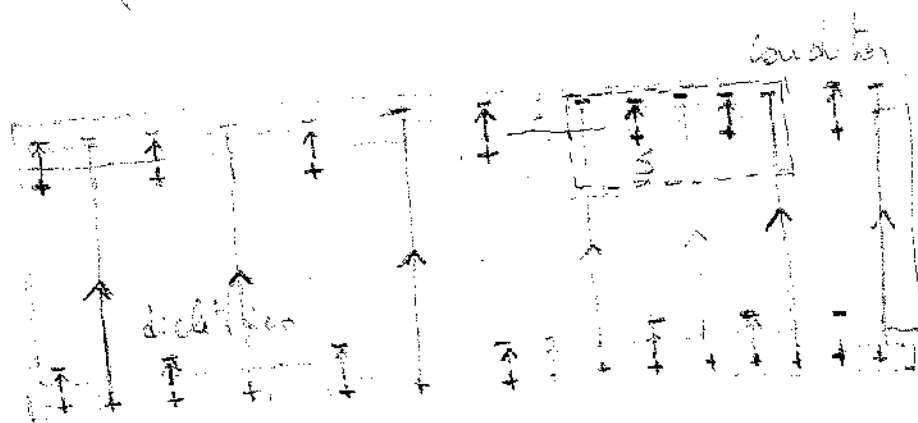


Fig. 1

A questão é entender porque existe o efeito na capacitância no dispositivo simples da fig. 1, de maneira que, se possa entender de maneira geral o efeito do campo elétrico aplicado num dielétrico.

A capacitância do dispositivo da
fig. 1 é bem conhecida (no vácuo)

$$C = \epsilon_0 \left(\frac{A}{d} \right) \quad \text{SI} \quad (2)$$

fator geométrico

$$\left(C = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{A}{d} \right) \quad \text{CGS} \right)$$

e

$$Q = CV \quad (3)$$

Para um capacitor carregado com uma carga
Q constante, se C é incrementado, signi-
fica que a diferença de potencial V entre as
placas é de reduzida

Então se isso acontece lembrando que

$$V_1 - V_2 = V = -q \int \frac{1}{r^2} \cdot d\vec{r} \cdot \vec{r}, \text{ o campo elétrico}$$

que atravessa o capacitor é também

reduzido. Por outro lado, é coberto pela

Lei de Gauss que o fluxo do campo elétrico é relacionado com a carga contida

na região em que esse fluxo está sendo avaliado. Vamos considerar a superfície gaussiana

S dada na fig 1. Se o campo

elétrico é reduzido pela presença do dielétrico,

se pode concluir que a carga

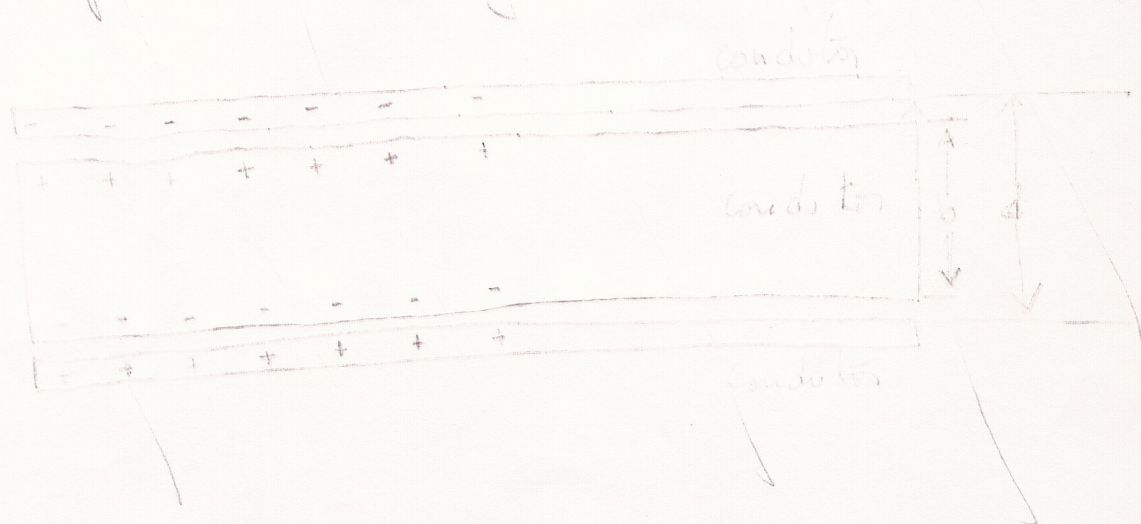
elétrica contida na superfície S deve

ser maior. Isso significa que deve existir

cargas positivas na superfície do dielétrico

Como o campo é reduzido mas não nulo,
deve-se admitir que a quantidade de
cargas positivas que aparecem na superfície
do dielétrico seja menor que as cargas negativas
na superfície do condutor.

Suponha a seguinte situação



2. O retom polarizável

7.

Antes de tentarmos entender o que acontece no material dielétrico, poderíamos nos perguntar o que acontece com um átomo neutro quando esse é colocado num campo elétrico. O átomo em questão é essencialmente um núcleo carregado positivamente com uma nuvem de elétrons. Nesse caso simplificado, a presença do campo elétrico desloca o núcleo positivo (ver Fig. 3)

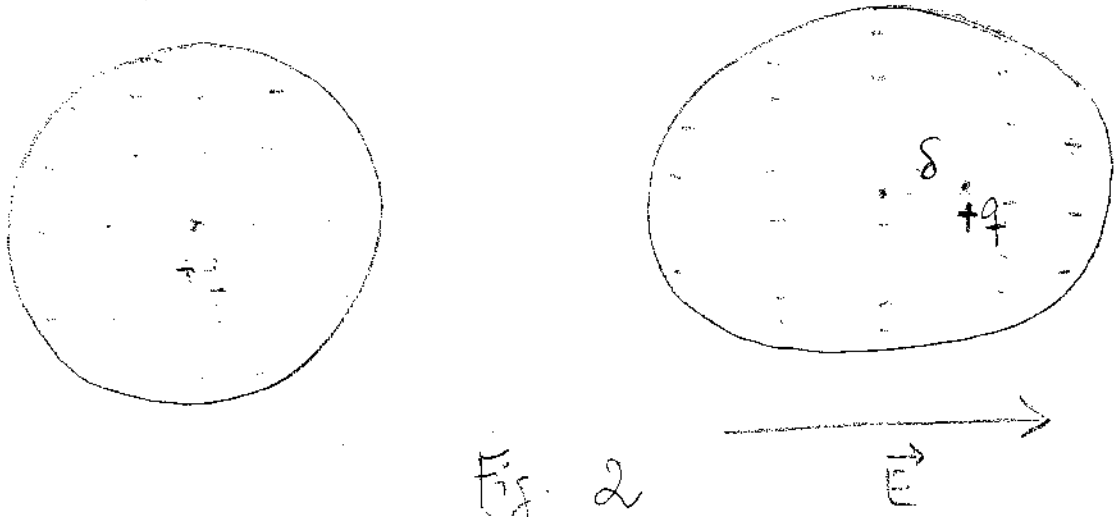


Fig. 2

Com campos relativamente fracos, devido ao deslocamento das cargas negativas e positivas (separação de cargas), vai aparecer um "pequeno" momento de dipolo $\vec{p}$, onde (p/ campo fraco):

$$\vec{p} = \alpha \vec{E} \quad (4)$$

Exemplo 1: (Átomo) Um átomo simples!
 se átomo consiste de um núcleo (+q) cercado por uma nuvem de elétrons (-q).

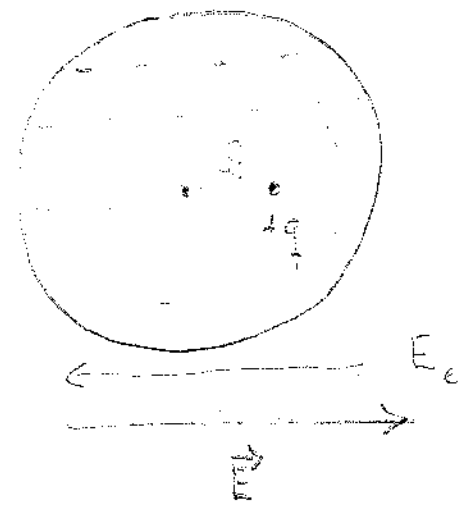
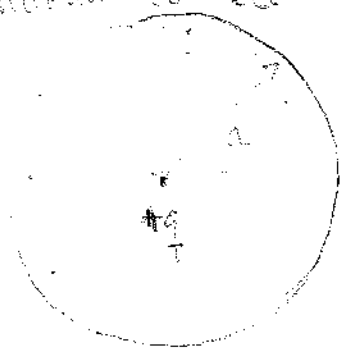


Fig. 3

Neste exemplo é assumido que a presença do campo elétrico preserva a forma esférica da nuvem de elétrons.

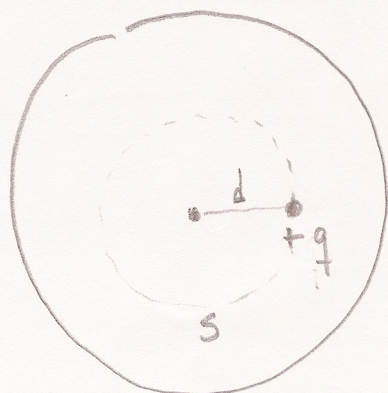


Fig. 4

No equilíbrio o ^{módulo} campo elétrico ^{externo} que desloca o núcleo e' é igual ao campo interno ^{módulo} E_e ^{que pode ser} calculado utilizando-se ^a superfície gaussiana S mostrada na figura 4.

$$E_e \cdot 4\pi s^2 = \frac{q'}{\epsilon_0}$$

para densidade constante

$$q' = q \cdot \frac{\frac{4}{3}\pi s^3}{\frac{4}{3}\pi a^3}$$

ou

$$q' = q \cdot \frac{s^3}{a^3}$$

logo

$$E_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q \frac{s}{a^3}$$

como $E = E_e$ ficamos

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho}{a^3} \quad \text{onde}$$

p e' momento de ^{vetor} momento de dipolo

$$p = qd$$

Portanto

$$p = (4\pi\epsilon_0 a^3) E$$

SI

$$p = \underbrace{a^3}_{\alpha} E$$

CGS

Obviamente, no caso de um material dielétrico com N átomos ^{ou} moléculas V ^{pt unidade de volume} e e metros introduzindo uma densidade de dipolos, ou mais precisamente, o vetor polarização $\vec{P}$ (momento de dipolo $\times$ unidade de volume):

$$\vec{P} = Nq \vec{c} \quad (5)$$

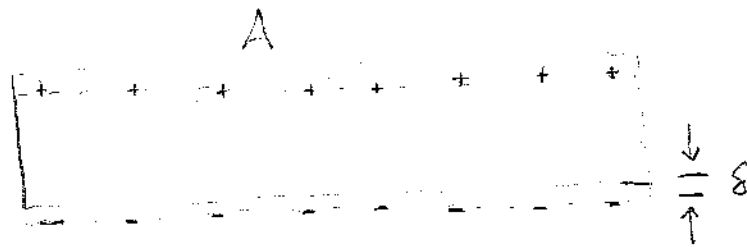
$\vec{P} \parallel \vec{\delta}$, $\vec{\delta}$ vetor que dá a direção da separação de carga.

3. Polarização de cargas

Vamos considerar uma situação simples, isto é, um material dielétrico onde o

O vetor $\vec{P}$ é uniforme (a $\vec{\nabla} \cdot \vec{P} = 0$).

Nesse caso, basta olhar para o que acontece na superfície do material



Pedacinho de material

Fig. 5

Se A é a área (ver Fig. 5), o número de elétrons que aparece na superfície é $A \times N \times \delta$. Então, a densidade superficial ^{de carga} induzida na superfície do material é

$$\sigma_{pl} = N q_e \delta \quad (6)$$

$\vec{E}'$ ∇ assumido ∇ perpendicular à superfície.

Mas, então o produto de P pode
ser interpretado, isto é:

$$\sigma_{\text{pol}} = P \quad (7)$$

Vamos assumir o dieletrico esta'
feito de capacitor de placas paralelas. Essas
placas tem uma densidade superficial de
cargas livres σ_{livre} . Pela lei de Gauss

$$E = \frac{\sigma_{\text{livre}} - \sigma_{\text{pol}}}{\epsilon_0} \quad (8)$$

(σ_{livre} e σ_{pol} tem sinais opostos !). Utilizam
do Eq. (7) na Eq. (8)

$$\epsilon_0 E = \sigma_{\text{livre}} - P \quad (9)$$

Para muitas substâncias (os dielétricos lineares)

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi \vec{E} \quad (10)$$

(Compare com o exemplo 1)

χ é a suscetibilidade linear do material

dielétrico que depende ^{de seus} detalhes microscópicos.

Logo, a Eq. (9) pode ser reescrita como

$$\epsilon_0 E = \frac{\sigma_{\text{livre}}}{\epsilon_0} - \chi E$$

$$(1 + \chi) E = \frac{\sigma_{\text{livre}}}{\epsilon_0}$$

ou

$$E = \frac{\sigma_{\text{livre}}}{\epsilon_0} \frac{1}{1 + \chi} \quad (10)$$

isto a intensidade do campo é reduzida por

um fator $\frac{1}{1 + \chi}$

Como fica a diferença de potencial V entre as placas. Num capacitor:

$$V = E d = \quad (11)$$

Substituindo o campo elétrico encontrado na Eq (10),

V torna-se

$$V = \frac{\sigma_{\text{line}} d}{(1 + \chi) \epsilon_0} \quad (12)$$

Se a carga total no capacitor ^{o el. dielétrico} $Q = \sigma_{\text{line}} \cdot A$

$$Q = C V$$

$$\frac{A}{d} (1 + \chi) \epsilon_0 V = \underbrace{\sigma_{\text{line}} A}_Q$$

$$\text{significa que } C = \epsilon_0 (1 + \chi) \frac{A}{d} = \underbrace{\epsilon_0 \frac{A}{d}}_C \underbrace{(1 + \chi)}_K = K C \quad (13)$$

ou $\kappa = (1 + \chi) \quad \text{[ver eq. (1)]}.$

Tem-se, portanto:

Isso explica os efeitos discutidos no início dessa exposição no exemplo simples de um capacitor de placas paralelas.

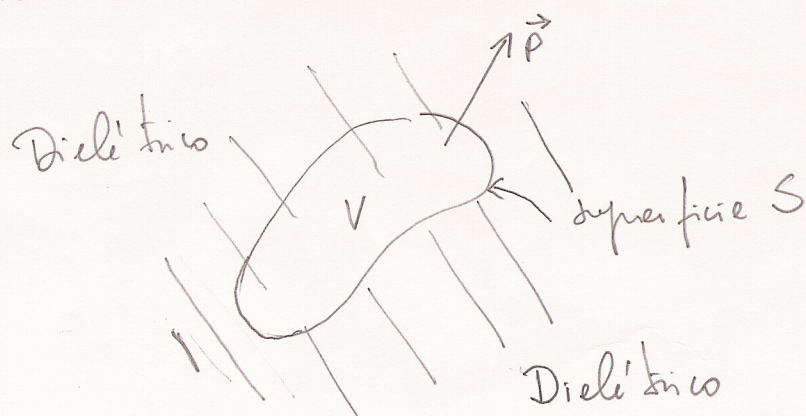
Em caso mais geral:

$$Q_{\text{rel}} = \vec{P} \cdot \vec{n} \quad \text{[ver diagrama]}$$

Isto é, a carga movida através de qualquer elemento da superfície é a componente de P perpendicular à superfície.

A partir de agora vamos relaxar a condição $\nabla \cdot \vec{P} = 0$. Isto significa que o deslocamento de carga pode criar regiões com uma densidade de carga volumétrica ρ_{rel} .

Considerando um certo volume V dentro do dielétrico



a carga total deslocada para fora do volume é igual ao excesso de carga de sinal contrário deixado dentro do volume V . Então, a carga líquida dentro de V :

$$\Delta Q_{\text{pol}} = - \oint_S \vec{P} \cdot \vec{n} da \quad (16)$$

Pelo teorema da divergência

$$\int_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) dV = \oint \vec{A} \cdot \underbrace{d\vec{a}}_{\vec{n} da}$$

o excesso $\Delta\varphi_{\text{pot}}$ pode ser também escrito

como :

$$\oint \vec{P} \cdot \hat{n} d\vec{a} = \int_V (\nabla \cdot \vec{P}) dV \quad (17)$$

Logo

$$\Delta\varphi_{\text{pot}} = - \int_V (\nabla \cdot \vec{P}) dV \quad (18)$$

que permite escrever

$$\boxed{\int_{\text{pot}} = - \vec{\nabla} \cdot \vec{P}} \quad (\text{SI}) \quad (19)$$

$$\boxed{\int_{\text{pot}} = - \vec{\nabla} \cdot \vec{P}} \quad (\text{CGS})$$

4. Equações de Eletrostática em

um dielétrico

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi\rho \quad (\text{CGS})$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (\text{SI}) \quad (20)$$

podemos desdobrar a densidade total $\rho = \rho_{\text{line}} + \rho_{\text{pol}}$ então:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho_{\text{line}} + \rho_{\text{pol}}}{\epsilon_0} \quad (\text{SI}) \quad (22)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi(\rho_{\text{line}} + \rho_{\text{pol}})$$

Substituímos Eq. (13) na Eq. (20)

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho_{\text{line}}}{\epsilon_0} - \frac{1}{\epsilon_0} \vec{\nabla} \cdot \vec{P} \quad (\text{SI})$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi\rho_{\text{line}} - 4\pi \vec{\nabla} \cdot \vec{P} \quad (\text{CGS})$$

Éo campo que de origem na eletrostática:

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\vec{E} + \frac{1}{\epsilon_0} \vec{P} \right) = \frac{\rho_{\text{line}}}{\epsilon_0} \quad (\text{SI}) \quad (23)$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{E} + 4\pi \vec{P}) = 4\pi\rho_{\text{line}} \quad (\text{CGS})$$

e

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 \quad \left(\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \right) \quad (24)$$

Mas p/ um dielétrico linear temos

$$\begin{aligned}\vec{P} &= \epsilon_0 \chi \vec{E} & (\text{SI}) & \quad (\text{ver Eq. (10)}) \\ \vec{P} &= \chi \vec{E} & (\text{CGS})\end{aligned}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\vec{E} + \chi \vec{E} \right) = \frac{\rho_{\text{line}}}{\epsilon_0} \quad (\text{SI})$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{E} + 4\pi\chi \vec{E}) = 4\pi \rho_{\text{line}} \quad (\text{CGS})$$

ou

$$\vec{\nabla} \cdot \left[(1 + \chi) \vec{E} \right] = \frac{\rho_{\text{line}}}{\epsilon_0} \quad (\text{SI}) \quad (25)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \left[(1 + 4\pi\chi) \vec{E} \right] = 4\pi \rho_{\text{line}} \quad (\text{CGS})$$

como

$$\begin{aligned}\kappa &= (1 + \chi) & (\text{SI}) \\ \kappa &= (1 + 4\pi\chi) & (\text{CGS})\end{aligned}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \kappa \vec{E} = \frac{\rho_{\text{line}}}{\epsilon_0} \quad (\text{SI}) \quad (26)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \kappa \vec{E} = 4\pi \rho_{\text{line}} \quad (\text{CGS})$$

Definiremos um novo vetor chamado vetor deslocamento ^{elétrico}

$$\begin{aligned}\vec{D} &\equiv \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} & (\text{SI}) \\ \vec{D} &\equiv \vec{E} + 4\pi \vec{P} & (\text{CGS})\end{aligned} \quad (27)$$

As equações da eletrostática (ver Eq. (23)

e Eq. (24) podem ser reescritas como:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \int_{\text{line}} \quad (\text{SI}) \quad (28)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 4\pi \int_{\text{line}}$$

e

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 \quad (29)$$

Podemos resolver essas equações? Se

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi \vec{E} \quad (\text{SI})$$

$$\vec{P} = \chi \vec{E} \quad (\text{CGS})$$

(dielétrico linear)

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \epsilon_0 \chi \vec{E} \quad (\text{SI})$$

$$\vec{D} = \vec{E} + 4\pi \chi \vec{E} \quad (\text{CGS})$$

então

$$\vec{D} = \epsilon_0 \underbrace{(1 + \chi)}_k \vec{E} \quad (\text{SI}) \quad (30)$$

$$\vec{D} = \underbrace{(1 + 4\pi\chi)}_{\epsilon} \vec{E} \quad (\text{CGS})$$

$$\vec{D} = \kappa \epsilon_0 \vec{E} \quad (\text{SI})$$

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} \quad (\text{CGS})$$

ou introduzindo uma nova constante chamada permissividade do meio

$$\epsilon_{\text{SI}} = \epsilon_0 (1 + \chi) = \epsilon_0 \kappa \quad (31)$$

ou a constante dielétrica relativa

22

$$\epsilon_{\text{CGS}} \equiv 1 + 4\pi\chi$$

(32)

P. dens ^{em SI} ~~res~~ never as ϵ_{gs} . (30) ou (31)

como

$$\vec{D} = \epsilon_{\text{SI}} \vec{E} \quad (\text{SI}) \quad (33)$$

$$\vec{D} = \epsilon_{\text{CGS}} \vec{E} \quad (\text{CGS})$$

A lei de Gauss pode então ser escrita em termos do vetor $\vec{D}$ (ver Eq. 28)

$$\int \vec{D} \cdot d\vec{a} = q_{\text{livre}} \quad (\text{SI}) \quad (34)$$

$$\int \vec{D} \cdot d\vec{a} = 4\pi q_{\text{livre}} \quad (\text{CGS}) \quad (35)$$